

russian

ЕГЭ 2019. Планиметрия. Решение задач

Садовничий Юрий Викторович

21 октября 2018 г.

Теоремы и формулы

$$1. l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

2. $l_a^2 = bc - xy$; где x, y — отрезки, на которые биссектриса l_a делит сторону a .

$$3. m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Задача 1

В треугольнике ABC , все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найти длину отрезка AD .

Задача 2

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

Задача 3

Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение длин которых равно $1 + \sqrt{2}$, считая от вершины. Найти острые углы треугольника.

Задача 4

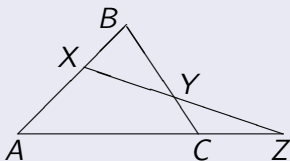
В остроугольном треугольнике BCD проведена высота CE и из точки E опущены перпендикуляры EM и EN на стороны BC и CD . Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найти угол $\angle BCD$.

Задача 5

В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$, AD — биссектриса угла BAC . Через точку D проведена прямая, перпендикулярная прямой AD и пересекающая прямую AC в точке E . Найти AE .

Теоремы и формулы

Теорема Менелая: Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC — в точке Z , то



$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

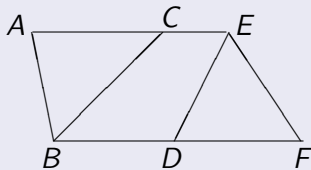
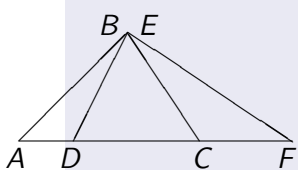
Теоремы и формулы

Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos \angle B$.

Пропорциональные отрезки и отношение площадей

Леммы о площадях

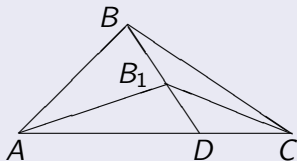
1. Если стороны треугольников лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то



$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AC}{DF}.$$

Леммы о площадях

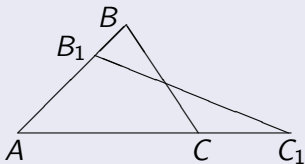
2. Если два треугольника имеют общую сторону AC , то



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}.$$

Леммы о площадях

3. Если треугольники ABC и AB_1C имеют общий (или одинаковый) угол, то



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$$

Задача 6

В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK . Найти площадь треугольника ABC , зная, что площадь треугольника BQC равна 1.

Задача 7

В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 8

Из точки M , которая расположена внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k , b и m , c и n . Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

Задача 9

Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Задача 10

На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найти длину отрезка AD , если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

Теоремы и формулы

1. Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.
2. Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.
3. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.

Задача 11

Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найти длину отрезка KC , если $BC = 4$, а $AK = 6$.

Задача 12

Через центр окружности, описанной около треугольника ABC , проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC . Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q . Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 13

Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B . На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C . Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b . Найдите расстояние от точки C до хорды AB .

Задача 14

В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.

Задача 15

Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найти AD , если $AB = 15$, $AC = 20$ и $AE = 24$.

Теоремы и формулы

В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противоположной данной вершине.

Теоремы и формулы

В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности (касающейся противоположной данной вершине стороны треугольника и продолжений двух других его сторон) с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника.

Задача 16

Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d ($c < d$).

Задача 17

Три круга с центрами в точках P , Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C . Известно, что величина угла PQR равна $2 \arcsin \frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Определить, какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A , B и C .

Теоремы и формулы

В параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

Теоремы и формулы

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника.

Теоремы и формулы

Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны.

Задача 18

В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

Задача 19

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC . Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD .

Задача 20

Через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E , причем $BE = 9$. Найти диагональ BD .