ЕГЭ-2019. Физика
Решение задач части 2

В.А.Грибов

к.ф.-м.н., доцент физического факультета

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

Обсудим «нелюбимую» тему – статику твёрдого тела.

Любое движение твёрдого тела представляет собой суперпозицию поступательного движения и вращательного движения. Это теорема из теоретической механики.

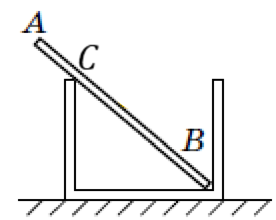
Поэтому условий равновесия твёрдого тела – ровно два:
одно – для равновесия относительно поступательного движения,
другое – для равновесия относительно вращательного движения.

Рассматривая статику твёрдого тела относительно инерциальной системы отсчёта, получаем эти два условия в виде:

1) сумма приложенных к телу сил равна нулю;
2) сумма моментов этих сил относительно оси вращения равна нулю.

Рассмотрим задачу из части 2

Однородный массивный стержень AB покоится, упираясь в стык дна и стенки банки концом B и опираясь на край банки в точке C (см. рисунок). Модуль силы, с которой стержень давит на стенку сосуда в точке C, равен 0,5 Н. Вертикальная составляющая силы, с которой стержень давит на сосуд в точке B, равна по модулю 0,6 Н, а её горизонтальная составляющая равна по модулю 0,3 Н. Чему равна сила тяжести, действующая на стержень? Трением пренебречь.



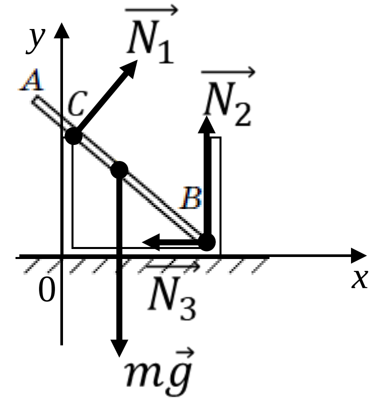
Решение.

$$N_{1x} - N_3 = 0.$$

Тогда $N_{1x} = N_3 = 0{,}3\ \text{Н}$, $N_{1y} = \sqrt{N_1{}^2 - N_{1x}{}^2} = 0{,}4\ \text{Н}$.

Далее, $N_{1y} + N_2 - mg = 0$,

откуда $mg = N_{1y} + N_2 = 1{,}0\ \text{Н}$.



Теперь ответим на вопрос, какой угол α с горизонтальной плоскостью образует стержень.

На рисунке видно, что такой же угол α образует с осью *y* сила $\overrightarrow{N_1}$. Поэтому $\sin\alpha = \frac{N_{1x}}{N_1} = 0{,}6$.

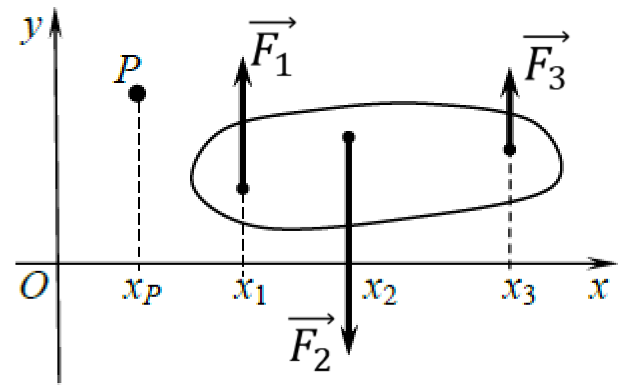
А теперь следующий вопрос: какая часть стержня находится внутри банки? Другими словами: чему равно отношение $\frac{BC}{AB}$?

Здесь придется применить второе условие равновесия – правило моментов. Но тут есть проблема: где тут ось вращения стержня?

На помощь приходит следующая теорема.

Теорема. Если сумма сил равна нулю, то сумма их моментов относительно двух параллельных друг другу осей одна и та же.

В случае сил произвольного направления каждую силу можно представить в виде суммы составляющих, каждая из которых параллельна одной из координатных осей. Поэтому рассмотрим случай трех параллельных сил.



Пусть на тело действуют силы $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$, параллельные оси Oy, причем $F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0$. Через точку P проведем ось перпендикулярно плоскости рисунка. Сумма моментов сил $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ относительно этой оси

$$\begin{aligned} M_P &= F_1(x_1-x_P)-F_2(x_2-x_P)+F_3(x_3-x_P)= \\ &= F_{1y}(x_1-x_P)+F_{2y}(x_2-x_P)+F_{3y}(x_3-x_P)= \\ &= F_{1y}x_1+F_{2y}x_2+F_{3y}x_3-x_P\left(F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}\right)= \\ &= F_{1y}x_1+F_{2y}x_2+F_{3y}x_3=M_O. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма моментов сил $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости xOy через точку P, равна сумме их моментов относительно параллельной оси, проходящей через начало координат, то есть не зависит от выбора точки P. Теорема доказана.

Мы получили право применять правило моментов не относительно реальной оси вращения (часто очевидно только её направление, но не положение), а относительно любой параллельной ей оси. Но всё это возможно, только если сумма приложенных к телу сил равна нулю.

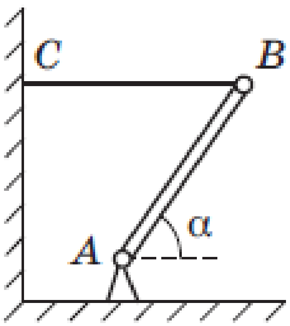
Теперь всё просто.

Ось, относительно которой считаем моменты сил, проведём через точку *B* перпендикулярно плоскости рисунка.

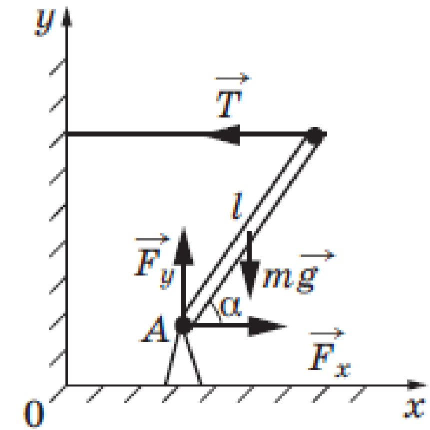
Тогда $mg\frac{AB}{2}\cos\alpha - N_1 \cdot BC = 0$, откуда $\frac{BC}{AB} = \frac{mg\cos\alpha}{2N_1} = 0{,}8$.

Задача 2.

Тонкий однородный стержень AB шарнирно закреплён в точке А и удерживается горизонтальной нитью BC (см. рисунок). Трение в шарнире пренебрежимо мало́. Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha = 45°$. Найдите модуль силы $\vec{F}$, действующей на стержень со стороны шарнира. Сделайте рисунок, на котором укажите все силы, действующие на стержень.



Возможное решение



1. Изобразим на рисунке силы, действующие на стержень, и систему координат Oxy.

Здесь $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ — вертикальная и горизонтальная составляющие силы, действующей на стержень со стороны шарнира.

2. В положении равновесия равны нулю сумма моментов сил, действующих на стержень, относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка, сумма горизонтальных и сумма вертикальных составляющих сил, действующих на стержень:

$$mg \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha - T \cdot l\sin\alpha = 0, \text{ где } l \text{ — длина стержня.} \tag{1}$$

$$F_x - T = 0; \tag{2}$$

$$F_y - mg = 0. \tag{3}$$

3. Модуль силы реакции шарнира $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{T^2 + (mg)^2}$.

Из (1) получим $T = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Окончательно

$$F = mg\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^2} = 1 \cdot 10 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \approx 11{,}2 \text{ Н}.$$

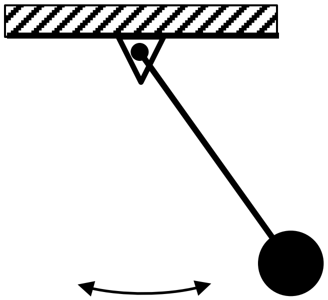
Ответ: $F \approx 11{,}2$ Н.

А теперь вопрос:
под каким углом β к горизонту направлена сила $\vec{F}$?

Ответ очевиден: $tg\beta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{mg}{mg\cdot\frac{1}{2}ctg\alpha} = 2tg\alpha$.

Значит, сила $\vec{F}$, действующая на стержень со стороны шарнира, направлена не по стержню, а под бо́льшим углом к горизонту.

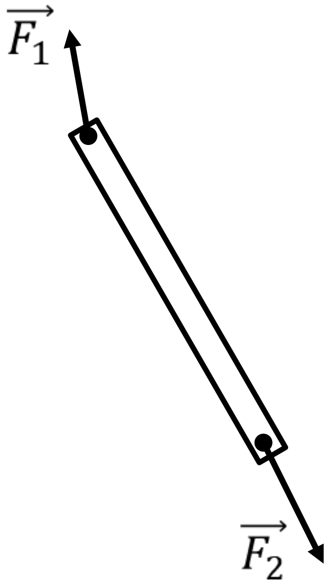
А если шарик качается не на нитке, а на стержне, прикреплённом другим концом к шарниру под потолком?
Как направлены в этом случае силы, приложенные к стержню со стороны шарика и со стороны шарнира?
Оказывается, всё дело в массе стержня.



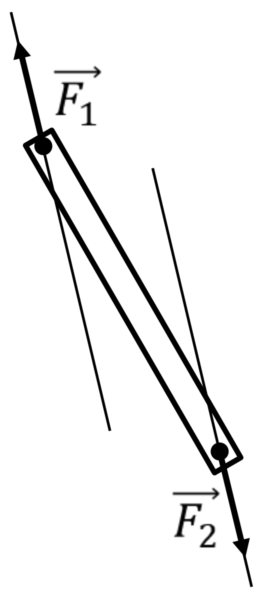
Задача 3.
Шарик массой *m* прикреплён к невесомому стержню длиной *L*. Другой конец стержня шарнирно закреплён под потолком. Стержень отвели от вертикального положения на угол α и отпустили из состояния покоя. С какой скоростью шарик проходит нижнюю точку траектории?

Всё было бы просто, будь на месте стержня невесомая нерастяжимая нить.
Тогда сила натяжения нити направлена по нити, то есть по радиусу окружности, по которой движется шарик. Значит, работа силы натяжения нити при движении шарика равна нулю, и механическая энергия шарика сохраняется:

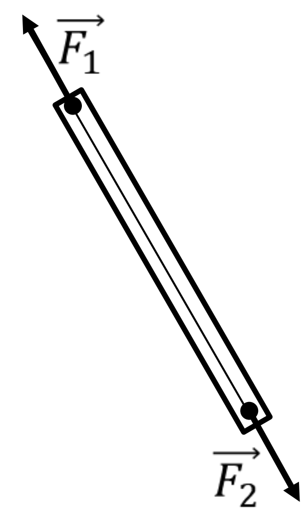
$$mgL(1-\cos\alpha)=\frac{mv^2}{2},\text{ откуда } v=\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$



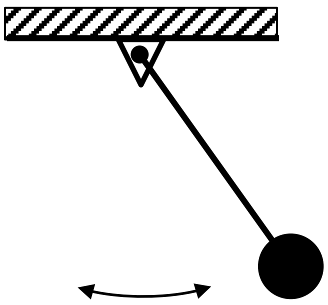
На стержень действуют сила $\overrightarrow{F_1}$ со стороны шарнира и сила $\overrightarrow{F_2}$ со стороны шарика. Сила тяжести равна нулю. Запишем второй закон Ньютона для поступательного движения стержня: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = m\vec{a} = 0.$
Значит, $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$, то есть силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ равны по модулю, противоположно направлены и лежат на параллельных прямых.



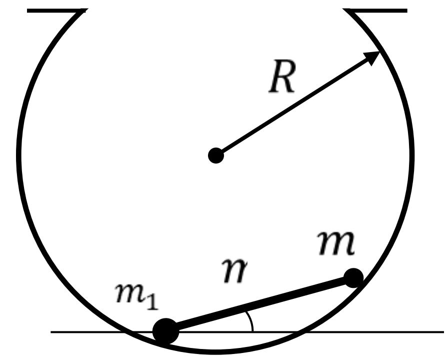
Тогда силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ представляют собой пару сил. И они **мгновенно** раскрутят (приведут во вращение) тело с **нулевой** массой, если параллельные прямые не совпадают друг с другом. А стержень благодаря шарику набирает скорость **постепенно**. Значит, силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ лежат на одной прямой, то есть действуют вдоль стержня.



Вот теперь видно, что в этой задаче невесомый стержень ведёт себя как невесомая нить, и задачу можно решать точно так же, как и в случае с нитью.

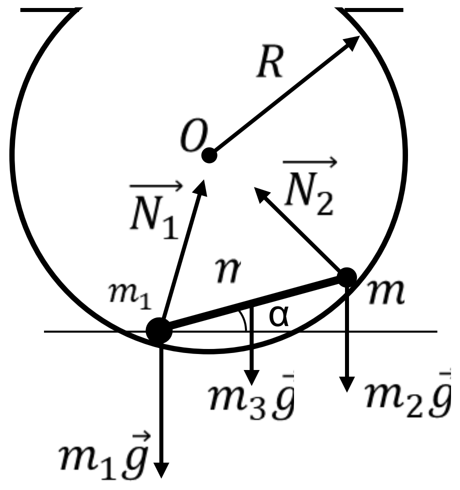


Задача 4.
Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 соединены однородным стержнем массой m_3 и длиной R. Получившаяся гантель покоится в сферической выемке радиусом R с гладкой поверхностью. Найдите угол α между стержнем и горизонтальной плоскостью.



Если показывать все силы, действующие на шарики и стержень, то трудно избежать ошибок. На самом деле нас интересуют только **внешние** силы, действующие на образовавшуюся гантель.

Внешние силы показаны на рисунке. Рассмотрим только условие равновесия гантели относительно вращения. Скольжение гантели по поверхности выемки представляет собой вращение относительно оси, проходящей через центр сферы *O* перпендикулярно плоскости рисунка. Моменты сил $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ относительно этой оси равны нулю. Плечи сил тяжести



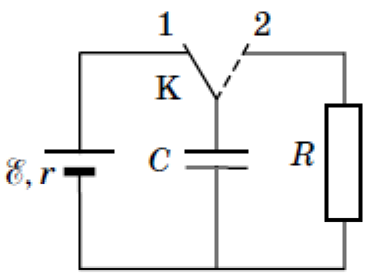
$$l_1 = R\sin(30° - \alpha)$$
$$l_2 = R\sin(30° + \alpha)$$
$$l_3 = \frac{1}{2}(l_2 - l_1)$$

Условие равновесия:

$$m_1gR\sin(30° - \alpha) - m_2gR\sin(30° + \alpha) -$$
$$-m_3g\frac{R}{2}[\sin(30° + \alpha) - \sin(30° - \alpha)] = 0.$$

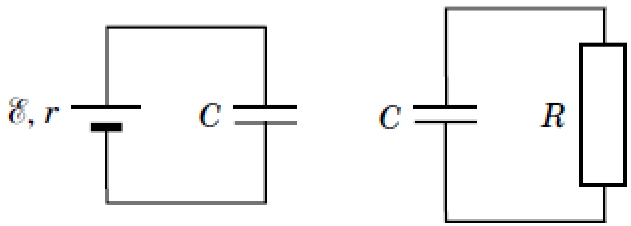
Отсюда $tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}\cdot(m_1 + m_2 + m_3)}$

В схеме, показанной на рисунке, ключ К долгое время находился в положении 1. В момент $t_0 = 0$ ключ перевели в положение 2. К моменту $t > 0$ на резисторе R выделилось количество теплоты $Q = 25$ мкДж. Сила тока в цепи в этот момент равна $I = 0{,}1$ мА. Чему равно сопротивление резистора R? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 15$ В, её внутреннее сопротивление $r = 30$ Ом, ёмкость конденсатора $C = 0{,}4$ мкФ. Потерями на электромагнитное излучение пренебречь.



Образец возможного решения:

1. К моменту $t_0 = 0$ конденсатор полностью заряжен, ток в левой части схемы (см. рисунок слева) равен нулю, поэтому напряжение между обкладками конденсатора равно ЭДС $\mathcal{E}$, энергия конденсатора $W_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$.



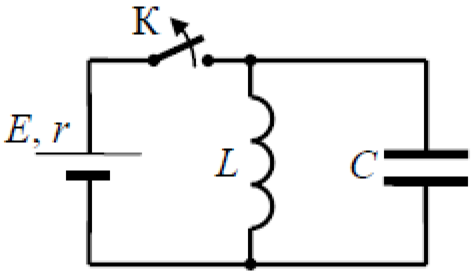
2. В момент $t > 0$ напряжение на конденсаторе U равно напряжению IR на резисторе в правой части схемы (см. рисунок справа). Энергия конденсатора в этот момент

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{C(IR)^2}{2}.$$

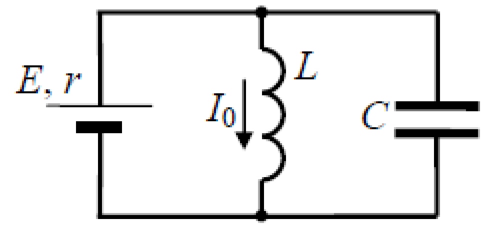
3. Пренебрегая потерями на излучение, получаем баланс энергии: $W_0 = W + Q$, или $\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C(IR)^2}{2} + Q$, откуда $R = \frac{1}{I}\sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{2Q}{C}} = 100$ кОм.

Ответ: $R = 100$ кОм.

В электрической цепи, показанной на рисунке, ключ К длительное время замкнут, $E = 6$ В, $r = 2$ Ом, $L = 1$ мГн, $C = 160$ мкФ. В момент $t = 0$ ключ К размыкают. Какова сила тока I в контуре в момент, когда в ходе возникших в контуре электромагнитных колебаний напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника? Сопротивлением проводов и активным сопротивлением катушки индуктивности пренебречь.



1. Непосредственно перед размыканием ключа К ток через конденсатор равен нулю, по катушке течет ток $I_0 = \dfrac{E}{r}$, напряжение U_{0C} на конденсаторе равно напряжению на катушке, поэтому $U_{0C} = 0$.



2. После размыкания ключа К в контуре возникают гармонические электромагнитные колебания. Энергия электромагнитных колебаний в контуре сохраняется:

$\dfrac{LI^2}{2} + \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{LI_0^2}{2}$, откуда получаем $I = \sqrt{I_0^2 - \dfrac{C}{L}U^2}$.

Учитывая, что $U = E$, $I_0 = \dfrac{E}{r}$, получим:

$$I = E\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{C}{L}} = 6\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{0{,}16 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}} = 1{,}8 \text{ A}.$$

Ответ: $I = 1{,}8$ А

Спасибо
за внимание!

Контакты издательства

По вопросам приобретения учебно-методических пособий **издательства «Экзамен»** обращайтесь по тел.:

8-495-641-00-30

8-905-773-43-83

Родионов Андрей Борисович

При заказе на класс цена будет на 10% ниже, чем в любом Интернет-магазине